

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

ФАКУЛЬТЕТ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И КИБЕРНЕТИКИ

На правах рукописи

Китов Виктор Владимирович

**ОЦЕНКА КАЧЕСТВА ПРОГНОЗОВ МОДЕЛЕЙ
И ПРОГНОЗИРОВАНИЕ ПРИ НАЛИЧИИ
СТРУКТУРНЫХ СДВИГОВ**

Специальность 05.13.18 - математическое моделирование,
численные методы и комплексы
программ

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва-2008

Работа выполнена на кафедре системного анализа факультета ВМиК Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова.

НАУЧНЫЙ РУКОВОДИТЕЛЬ: кандидат физико-математических наук,
доцент Смирнов Сергей Николаевич.

ОФИЦИАЛЬНЫЕ ОППОНЕНТЫ: доктор физико-математических наук,
заведующий кафедрой теории вероятностей
и математической статистики РУДН,
профессор Хохлов Юрий Степанович;

кандидат физико-математических
наук, старший научный сотрудник
факультета ВМиК МГУ имени
М.В. Ломоносова Уфимцев Михаил Валентинович.

ВЕДУЩАЯ ОРГАНИЗАЦИЯ: Вычислительный центр РАН.

Защита состоится «_____» _____200__ года в ____ часов на заседании диссертационного совета Д 501.001.43 при Московском государственном университете имени М.В. Ломоносова по адресу: 119992 Москва, Ленинские горы, МГУ 2^й учебный корпус, факультет ВМиК, аудитория 685.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке факультета ВМиК Московского государственного университета им.М.В.Ломоносова по адресу: 119992 Москва, Ленинские горы, МГУ 2^й учебный корпус.

С текстом автореферата можно ознакомиться на официальном сайте ВМиК МГУ имени М.В. Ломоносова <http://www.cmc.msu.ru> в разделе «Наука» - «Работа диссертационных советов» - «Д.501.001.43».

Автореферат разослан «_____» _____2008 г.

Ученый секретарь диссертационного совета
доктор физико-математических наук,
профессор

Захаров Е.В.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. В приложениях математического моделирования часто возникает задача построения прогнозов \hat{y}_{T+1} некоторой величины y_{T+1} по располагаемой фиксированной выборке наблюдений $z_1, z_2, \dots, z_T, x_{T+1}$, где $z_t = (x_t, y_t), x_t \in \mathbb{R}^{1 \times d}, y_t \in \mathbb{R}, t = 1, 2, \dots, T$. Данная ситуация отвечает случаю, когда у исследователя, в силу стоимостных, временных и других ограничений, нет возможности производить собственный контролируемый эксперимент, и он вынужден опираться только на имеющиеся данные. Такая ситуация часто возникает, например, в экономических, геологических, астрономических и других приложениях. При этом обычно предполагается, что данные описываются параметрической моделью $y_{t+1} = g(x_{t+1}, \theta) + \varepsilon_{t+1}$, где $g(\cdot)$ – некоторая заданная функция, x_{t+1} – известные на момент прогнозирования переменные (регрессоры), ε_{t+1} – случайная ошибка, а $\theta \in \mathbb{R}^{p \times 1}$ – вектор неизвестных параметров. Прогноз величины y_{n+1} строится согласно формуле $\hat{y}_{t+1} = g(x_{t+1}, \hat{\theta}_t)$, где $\hat{\theta}_t$ – оценка вектора θ по располагаемым наблюдениям. Для повышения точности прогнозов возникает задача выбора наиболее подходящей функции $g(\cdot)$ и метода оценивания величины $\hat{\theta}_t$. В диссертационной работе указанные задачи решаются независимо.

1) *Выбор функции $g(\cdot)$.* Стандартной практикой, применяемой, например, в книге [1] и статьях [2], [3], [4], при выборе параметрической функции $g(\cdot)$ для получения наилучших прогнозов, является сопоставление величин $\mathbb{E}f(x_t, y_t, \theta)$ для различных функций $g(\cdot)$, где $f(\cdot)$ – некоторая функция качества прогнозов. Например, при тестировании несмещенности прогнозов, может использоваться функция $f(x_t, y_t, \theta) = y_t - g(x_t, \theta) = \varepsilon_t$, при тестировании величины ошибки прогнозов – функция $f(x_t, y_t, \theta) = \varepsilon_t^2$ либо $f(x_t, y_t, \theta) = [\varepsilon_t/y_t]^2$, при тестировании наличия корреляции ошибок прогнозов – функция $f(x_t, y_t, \theta) = \varepsilon_t \varepsilon_{t-1}$, при тестировании наличия корреляции между ошибками прогноза и прогнозами другой модели u_t – функция $f(x_t, y_t, \theta) = \varepsilon_t u_t$. Для построения точечных оценок величины $\mathbb{E}f(x_t, y_t, \theta)$ используется статистика $S_R^1 = \frac{1}{P} \sum_{t=R}^{T-1} \hat{f}_{t+1}$, а при тестировании гипотез – статистика $S_R^2 = \frac{1}{\sqrt{P}} \sum_{t=R}^{T-1} (\hat{f}_{t+1} - \mathbb{E}f_t)$, где $\hat{f}_t = f(x_t, y_t, \hat{\theta}_t)$, $P = T - R$, а R является параметром, выбираемым исследователем.

Распределение статистики S_R^2 получено в работах [3] и [4] для случаев, когда оценка $\hat{\theta}_t$ получается для каждого момента времени t , используя фиксированное число предшествующих наблюдений $z_{t-R+1}, z_{t-R+2}, \dots, z_t$ (*скользящее* окно наблюдений), и все наблюдения z_1, z_2, \dots, z_t , предшествующие моменту прогноза (*расширяющееся* окно наблюдений). Актуальным остался вопрос получения асимптотического распределения статистики, в случае использования всех располагаемых в выборке наблюдений z_1, z_2, \dots, z_T (*полное* окно наблюдений) при расчете $\hat{\theta}_t$. Кроме того, актуальной является задача повышения точности асимптотической аппроксимации распределения статисти-

стики S_R^2 , поскольку статистические испытания, представленные в работе [4], свидетельствуют о недостаточной точности асимптотической аппроксимации распределения указанной статистики при использовании скользящего окна наблюдений и больших значениях отношения P/R .

Ограничением существующего метода получения точечных оценок величины $\mathbb{E}f(x_t, y_t, \theta)$ с помощью статистики S_R^1 служит равнозначный учет прогнозов \hat{f}_{t+1} в различные моменты времени, в то время как сами прогнозы, в случае использования расширяющегося окна наблюдений для оценки $\hat{\theta}_t$, различаются по точности – прогнозы в более ранние моменты времени являются менее точными, чем прогнозы в более поздние моменты времени, где параметр θ оценивается по большему числу наблюдений.

При использовании статистики S_R^1 , актуальной является задача подходящего выбора параметра R . Имеют место противоречивые требования: следует уменьшать R для усреднения по большему числу прогнозов для снижения дисперсии получаемых оценок, и следует увеличивать R для усреднения по более поздним прогнозам, в которые параметр $\hat{\theta}_t$ оценивается достаточно точно, и ошибка его оценивания вызывает наименьшее смещение оценки качества прогнозов. В связи с этим, встает вопрос оценки степени неравнозначности прогнозов в различные моменты времени при расчете их качества.

2) *Совершенствование оценок $\hat{\theta}_t$.* Во многих ситуациях стандартные методики получения оценок θ не являются удовлетворительными. Одной из таких ситуаций, исследуемых в диссертационной работе, является наличие в выборке структурных сдвигов – феномена, при котором на различных участках выборки данные описываются моделью $y_{t+1} = g(x_{t+1}, \theta) + \varepsilon_{t+1}$ с различными значениями параметра θ . Структурные сдвиги описывают внутренние изменения моделируемого объекта либо окружающей среды, и часто наблюдаются, например, при анализе экономических временных рядов, что отражено в таких работах, как [5] и [6], где показывается, что ожидания экономических агентов (инвесторов, потребителей, производителей), государственная политика и общемировые события способны существенно влиять на законы изменения экономических переменных. Участки выборки, в которых параметр θ постоянен, в дальнейшем будут называться структурными режимами.

В связи с многочисленными свидетельствами присутствия структурных сдвигов в данных, актуальной является разработка методов прогнозирования, корректно учитывающих наличие данного феномена. В работе [9] показано, что применение стандартных средств при наличии структурных сдвигов ограничено: учет большого числа наблюдений для получения оценки $\hat{\theta}_t$ приводит к сильному смещению оценки вектора неизвестных параметров и прогноза модели в связи с тем, что оценивание производится в том числе по структурным режимам, на которых вектор параметров θ может существенно отличаться от своего значения в момент прогнозирования. Прогноз,

использующий только наблюдения из последнего структурного режима, отвечающего моменту прогнозирования, может обладать высокой дисперсией, если число наблюдений в этом структурном режиме невелико. Ограничением существующего метода (*метод выбора длины окна*, предложенный в работе [11]), разрешающего данное противоречие, является недостаточная гибкость к специфике данных в выборке: метод использует не все располагаемые наблюдения и осуществляет целочисленную, а не непрерывную оптимизацию.

В целом, развитие подходов оценки качества прогнозов и методов прогнозирования при наличии структурных сдвигов является актуальной задачей для эффективного анализа данных в экономических, финансовых и других приложениях.

Цель работы заключается в развитии методов построения наилучших прогнозов для зависимой переменной статистической модели по располагаемой выборке наблюдений. Данная цель достигается за счет решения следующих задач:

- 1) совершенствования методик оценки качества прогнозов.
- 2) развития нового метода устойчивого прогнозирования при наличии структурных сдвигов в выборке наблюдений.

Научная новизна работы состоит в том, что в ней:

1. Усовершенствован подход к оценке качества прогнозов, за счет получения асимптотического распределения статистики S_R^2 в случае полного окна и за счет определения асимптотического смещения второго порядка указанной статистики для случаев полного, расширяющегося и скользящего окна наблюдений.
2. В качестве альтернативы стандартному подходу, использующему статистику S_R^1 , предложен новый метод получения точечных оценок качества прогнозов моделей, учитывающий неравнозначность прогнозов в различные моменты времени, за счет их неравномерного усреднения в оценке.
3. Предложен и исследован новый метод устойчивого прогнозирования при наличии структурных сдвигов, учитывающий все наблюдения выборки.

Теоретическая и практическая ценность работы.

1. Разработаны математические инструменты, повышающие точность статистических выводов о качестве прогнозов моделей:
 1. Найденное асимптотическое распределение статистики S_R^2 в случае полного окна позволяет более точно тестировать гипотезы (использующие асимптотику первого порядка) по сравнению со случаями скользящего и расширяющегося окна при больших значениях P/R , поскольку обладает минимальным асимптотическим смещением второго порядка.

2. Учет найденного асимптотического смещения второго порядка для статистики S_R^2 существенно повышает точность статистических выводов при использовании скользящего окна и при тестировании гипотез с односторонней альтернативой при любом типе окна.
3. Предложенный метод, учитывающий неравнозначность прогнозов в различные моменты времени при использовании расширяющегося окна, обеспечивает получение точечных оценок качества прогнозов, обладающих меньшей ошибкой, по сравнению со стандартным подходом, использующим статистику S_R^1 , что демонстрируется на численных экспериментах. Данный метод позволяет определять степень неравнозначности прогнозов при расчете их качества, что может быть полезно при выборе параметра R при использовании стандартной статистики S_R^1 .
4. Предложенный новый метод прогнозирования при наличии структурных сдвигов в выборке наблюдений обеспечивает более точные прогнозы, по сравнению с последним предлагавшимся методом в данном классе задач (*метод выбора длины окна*), и более устойчивые (к величине структурного сдвига) прогнозы, по сравнению со стандартными методами прогнозирования, учитывающими все наблюдения выборки, либо наблюдения только последнего структурного режима.

Практическая ценность работы заключается в возможности применения полученных математических инструментов и методов для широкого класса приложений, связанных с анализом данных и прогнозированием, в частности, при решении задач финансового анализа, планирования и прогнозирования деятельности компаний, в социологических исследованиях. Полученные результаты могут быть внедрены в информационных системах интеллектуальной бизнес-аналитики и системах управления эффективностью бизнеса.

Защищаемые положения:

1. Получено асимптотическое распределение статистики S_R^2 в случае использования полного окна наблюдений при расчете оценок $\hat{\theta}_t$.
2. Получено асимптотическое смещение второго порядка для распределения статистики S_R^2 в случаях использования полного, скользящего и расширяющегося окна наблюдений.
3. Предложен новый метод получения точечных оценок качества прогнозов (величины $\mathbb{E}f(x_t, y_t, \theta)$), основанный на неравномерном усреднении прогнозов в случае использования расширяющегося окна наблюдений для оценки неизвестных параметров. Рассмотрена процедура расчета степени неравнозначности прогнозов в различные моменты времени при построении оценки качества прогнозов.
4. Предложен новый метод устойчивого прогнозирования при наличии в выборке структурных сдвигов неизвестной величины в известные моменты времени, и исследованы его основные свойства.

Методика исследований. При получении теоретических результатов в работе использовались методы теории вероятностей, математической статистики, а также асимптотические методы математического анализа. Для проверки полученных результатов проводились численные эксперименты в вычислительной системе *Matlab*.

Апробация работы. Основные результаты диссертации докладывались на четырех научных конференциях:

- XXI научная конференция Российской экономической школы. Май 2007.
- XII всероссийская школа-семинар *Современные проблемы математического моделирования*. Сентябрь 2007.
- Конференция Ломоносов-2008, секция *Вычислительная математика и кибернетика*. Апрель 2008.
- Конференция молодых ученых механико-математического факультета МГУ им. Ломоносова (секция *Математика и механика* конференции Ломоносов-2008). Апрель 2008. Доклад занял призовое место.

Публикации. Результаты диссертации опубликованы в семи работах автора, две из которых – в рецензируемых журналах, входящих в список ВАК.

Структура диссертации. Работа состоит из введения, четырех глав, состоящих в совокупности из 23 разделов, списка основных результатов и списка литературы, включающего 38 наименований. Полный объем диссертации - 129 страниц, который включает 44 рисунка и 6 таблиц.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во **введении** приведен краткий обзор литературы по теме диссертации, характеризующий состояние проблемы, и излагается краткое содержание работы.

Первая глава диссертации посвящена задаче оценки качества прогнозов. В **параграфе 1.1** рассказано об актуальности данного исследования. В **параграфе 1.2** дана постановка задачи и приведен список предположений. Рассматривается выборка z_1, z_2, \dots, z_T , полученная с помощью некоторого строго стационарного и эргодического случайного процесса, где каждое наблюдение делится на вектор регрессоров $x_t \in \mathbb{R}^{1 \times d}$ и зависимую переменную-скаляр y_t : $z_t = (x_t, y_t)$. Значение зависимой переменной y_t считается удовлетворяющим модели: $y_t = g(x_t; \theta) + \varepsilon_t$, где $\theta \in \mathbb{R}^{p \times 1}$ - вектор неизвестных параметров, удовлетворяющий условию экстремальной оценки:

$$\theta = \arg \max_{q \in \Theta} \mathbb{E} [\psi(z, q)]$$

с некоторой функцией ψ . Примерами данной функции являются¹:

$$\begin{aligned} \psi(z, q) &= -(y - g(x, q))^2 && \text{нелинейный метод наименьших квадратов} \\ \psi(z, q) &= \ln p(z|q) && \text{метод максимального правдоподобия} \\ \psi(z, q) &= -h^2(z, q) && \text{метод моментов} \end{aligned}$$

Прогнозирование осуществляется по формуле $y_{t+1} = g(x_{t+1}; \hat{\theta}_t)$, где $\hat{\theta}_t = \arg \max_{q \in \Theta} \hat{\mathbb{E}}_t[\psi(z, q)]$. Оператор $\hat{\mathbb{E}}_t$ обозначает выборочное среднее по скользящему, расширяющемуся либо полному окну наблюдений.

Используются следующие обозначения²:

$$\begin{aligned} f(x_{t+1}, y_{t+1}, \theta) &= f_{t+1}(\theta) = f_{t+1}; & f(x_{t+1}, y_{t+1}, \hat{\theta}_t) &= f_{t+1}(\hat{\theta}_t) = \hat{f}_{t+1}; \\ B &= -\mathbb{E} \left\{ \frac{\partial^2 \psi(z_t, \theta)}{\partial q \partial q'} \right\}^{-1}; & K &= \mathbb{E} \left\{ \frac{\partial^3 \psi(z_t, \theta)}{\partial q^3} \right\}; & F &= \mathbb{E} f_t; & F_1 &= \mathbb{E} \left\{ \frac{\partial f_t}{\partial \theta} \right\}; \\ F_2 &= \mathbb{E} \left\{ \frac{\partial^2 f_t}{\partial \theta^2} \right\}; & h_\tau &= \frac{\partial \psi(z_\tau, \theta)}{\partial q}; & m_\tau &= \frac{\partial^2 \psi(z_\tau, \theta)}{\partial q \partial q'} - \mathbb{E} \left\{ \frac{\partial^2 \psi(z_t, \theta)}{\partial q \partial q'} \right\}; \\ \Phi_{t+1}^1 &= \left(\frac{\partial f_{t+1}}{\partial \theta} - F_1 \right); & \Phi_{t+1}^2 &= \left(\frac{\partial^2 f_{t+1}}{\partial \theta^2} - F_2 \right); & \Gamma_j &= \mathbb{E} \left\{ \Phi_t^1 B h_{t-j} \right\}; \\ \Omega_j &= \mathbb{E} \left\{ m'_t B h_{t-j} \right\}; & \Lambda_j &= \mathbb{E} \left\{ h'_t B K B h_{t-j} \right\}; & \Psi_j &= \mathbb{E} \left\{ h_t B F_2 B h_{t-j} \right\}. \\ G_t &= \text{vec} \left[\frac{\partial \psi(z_t, \theta)}{\partial q}; \frac{\partial^2 \psi(z_t, \theta)}{\partial q \partial q'}; f(z_t; \theta) - F; \frac{\partial f}{\partial \theta}(z_t; \theta) - F_1; \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2}(z_t; \theta) - F_2 \right]. \end{aligned}$$

Рассматривается асимптотика, при которой с ростом объема выборки $\frac{P}{R} = \pi + \bar{o}\left(\frac{1}{\sqrt{T}}\right)$, где $\pi > 0$ - некоторый параметр.

Предполагается, что $\forall u \in \Theta$ ($\theta \in \text{int}\Theta$) выполнены условия:

1. $f_t(u)$ измерима и трижды непрерывно дифференцируема по u .
2. Для некоторого $\delta > 0$ $\mathbb{E} \left\{ \left| \text{vec} \left[\otimes_{i=1}^3 G_t \right] \right|^{2+\delta} \right\} < \infty$.
3. Процесс G_t является строго перемешивающим, то есть для сигма-алгебр $S_a^b = \sigma \{G_a, G_{a+1}, \dots, G_b\}$, выполнено следующее условие:

$$\sup_{A \in S_{-\infty}^t, B \in S_{t+\tau}^{+\infty}} |\mathbb{P}(AB) - \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)| = \alpha(\tau) \rightarrow 0 \text{ при } \tau \rightarrow \infty,$$

Дополнительно предполагается, что $\exists C_1 : \alpha(\tau) \leq C_1 \tau^{-\omega}$, $\frac{\omega \delta}{2+\delta} > 2$.

4. $\exists C_2 < \infty, t_0 > 0 : \forall t \geq t_0 \sup_{\substack{1 \leq i, j, k \leq m \\ \theta \in \Theta}} \left| \frac{\partial^3 f_{t+1}(u)}{\partial \theta^i \partial \theta^j \partial \theta^k} \right| < v_t$, где v_t - некоторая

измеримая функция, для которой выполнено условие $\mathbb{E} v_t < C_2$.

5. $\mathbb{E} \{ |\psi(z, u)| \times \mathbb{I}[|\psi(z, u)| > K] \} \rightarrow 0$ равномерно относительно $u \in \Theta$ при $K \rightarrow 0$ ($\mathbb{I}[\cdot]$ - индикаторная функция).
6. Множество Θ является компактом.
7. $\exists! \theta = \arg \max_{\theta \in \Theta} \mathbb{E} [\psi(z, q)] \in \Theta$.

¹ $p(z|q)$ обозначает плотность распределения с параметрами q в методе максимального правдоподобия, $h(z, q)$ обозначает функцию в условии на моменты $\mathbb{E} h(z, \theta) = 0$.

²Оператор vec обозначает операцию векторизацию: для матрицы $A = \{a_{ij}\} \in \mathbb{R}^{M \times N}$ $\text{vec}\{A\} = [a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1N}, a_{21}, a_{22}, \dots, a_{MN}]'$.

8. $\exists D(z) : \mathbb{E}D(z) < \infty, |\psi(z, q)| < D(z) \forall (z, q) \in (Z, \Theta)$, где Z - область значений переменной z .

В параграфе 1.3 приведены результаты первой главы диссертации при сделанных предположениях. Найдено асимптотическое распределение статистики S_R^2 при использовании полного окна наблюдений.

Утверждение 1: В случае использования полного окна наблюдений, статистика S_R^2 обладает следующим асимптотическим распределением:

$$S_R^2 \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, \Sigma), \quad \Sigma(\theta) = S_{ff} + \lambda_{fh} [F_1 B S'_{fh} + S_{fh} B F'_1] + \lambda_{hh} F_1 B S_{hh} B F'_1,$$

где $S_{ff} = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \mathbb{E} \{ (f_t - \mathbb{E}f) (f_{t-j} - \mathbb{E}f) \}$, $S_{fh} = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \mathbb{E} \{ (f_t - \mathbb{E}f) h'_{t-j} \}$,

$$S_{hh} = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \mathbb{E} \{ h_t h'_{t-j} \}, \quad \lambda_{fh} = \lambda_{hh} = \frac{\pi}{1+\pi}.$$

Аналитическая формула для Σ совпадает формулой, полученной для ковариационной матрицы в работах [3] и [4] в случае использования скользящего и расширяющегося окна наблюдений. В ней различаются лишь коэффициенты λ_{fh} и λ_{hh} :

$$\begin{aligned} \text{расширяющееся окно: } & \lambda_{fh} = 1 - \frac{1}{\pi} \ln(1 + \pi), \quad \lambda_{hh} = 2 \left[1 - \frac{1}{\pi} \ln(1 + \pi) \right]; \\ \text{скользящее окно: } (\pi \leq 1): & \lambda_{fh} = \frac{\pi}{2}, \quad \lambda_{hh} = \pi - \frac{\pi^2}{3}; \\ \text{скользящее окно: } (\pi > 1): & \lambda_{fh} = 1 - \frac{1}{2\pi}, \quad \lambda_{hh} = 1 - \frac{1}{3\pi}. \end{aligned}$$

Посредством асимптотического разложения второго порядка, получено асимптотическое смещение порядка $O\left(\frac{1}{\sqrt{R}}\right)$ для статистики S_R^2 и нормированной статистики $[\Sigma(\hat{\theta}_T)]^{-\frac{1}{2}} \times S_R^2$.

Утверждение 2: Асимптотическое смещение порядка $O\left(\frac{1}{\sqrt{R}}\right)$ для статистики S_R^2 равно:

$$b_{st} = \frac{1}{\sqrt{P}} \lambda_{bias} \times \left(\sum_{j=1}^{+\infty} \Gamma_j + F_1 B \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \Omega_j + \frac{1}{2} F_1 B \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \Lambda_j + \frac{1}{2} \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \Psi_j \right).$$

$$\text{Параметр } \lambda_{bias} = \begin{cases} \ln(1 + \pi), & \text{в случае расширяющегося окна} \\ \pi, & \text{в случае скользящего окна} \\ \frac{\pi}{1+\pi}, & \text{в случае полного окна} \end{cases}$$

Утверждение 3: Асимптотическое смещение порядка $O\left(\frac{1}{\sqrt{R}}\right)$ для статистики $[\Sigma(\hat{\theta}_T)]^{-\frac{1}{2}} \times S_R^2$ равно:

$$b_{t.st} = \frac{1}{\Sigma^{1/2}} b_{st} - \frac{1}{2\Sigma^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{P}} \frac{\pi}{1 + \pi} \left(\sum_{j=-\infty}^{+\infty} \phi_j + \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \varphi_j \right). \quad (1)$$

Здесь $\phi_j = \mathbb{E} \{ (f_t - \mathbb{E} f_t) h'_{t-j} \} B \frac{\partial \Sigma'}{\partial \theta}$; $\varphi_j = F_1 B \mathbb{E} \{ h_t h'_{t-j} \} B \frac{\partial \Sigma'}{\partial \theta}$.

Поскольку $\lambda_{fh} \in (0, 2)$; $\lambda_{hh} \in (0, 2)$, наибольшая разница в смещении при использовании скользящего, расширяющегося и полного окна наблюдений достигается за счет параметра λ_{bias} , который минимален в случае полного окна наблюдений и максимален в случае скользящего окна наблюдений. Следовательно, при больших значениях параметра π асимптотическое смещение, получаемое при помощи скользящего окна, максимально, а минимально при использовании полного окна наблюдений.

В параграфе 1.4 приведены результаты численных экспериментов, иллюстрирующих полученные аналитические результаты. Рассматривается модель $y_t = \beta y_{t-1} + \varepsilon_t$, в которой ошибки предполагаются независимыми и одинаково распределенными величинами, $\varepsilon_t \sim N(0, \sigma_\varepsilon^2)$. Параметр $\sigma_\varepsilon^2 = 1$ предполагается известным (например, исходя из другой выборки наблюдений), а $\beta = 1/2$ оценивается методом наименьших квадратов (МНК). Данная модель повторяет модель численного эксперимента, приведенного в работе [4]. Рассматриваются три теста со следующими нулевыми гипотезами:

$$H_0 : \mathbb{E} \varepsilon_t \varepsilon_{t-1} = 0; \quad H_0 : \mathbb{E} \varepsilon_t^2 = \sigma_\varepsilon^2; \quad H_0 : \mathbb{E} \varepsilon_t y_{t-2} = 0.$$

Для каждой нулевой гипотезы тестируются три альтернативы - что значение $\mathbb{E} f_t$ не равно, больше либо меньше своего теоретического значения.

Качество асимптотической аппроксимации определяется путем сравнения фактической значимости тестов, полученной при помощи 100000 испытаний Монте-Карло, с теоретическим значением, равным 5% и 2.5% для тестов с двусторонней и односторонней альтернативной гипотезой.

Результаты численных экспериментов для разных типов тестов имеют одинаковые качественные особенности. При отсутствии поправки на смещение $b_{t.st}$ несоответствие между теоретической и фактической значимостью тестов с двусторонней альтернативой максимально при использовании скользящего окна наблюдений, при этом данное несоответствие тем больше, чем больше отношение P/R . Это служит подтверждением выводов, полученных из аналитической формулы (1). При учете смещения $b_{t.st}$ в тестировании гипотез, теоретическая значимость очень точно соответствует фактической значимости тестов с двусторонней альтернативой, независимо от типа выбираемого окна и значения отношения P/R . Выводы относительно точности односторонних тестов повторяют выводы для двусторонних тестов за тем исключением, что их точность оказывается еще более зависимой от смещенности распределения.

Выборочная плотность распределения статистики, оценивающей качество прогнозов, для тестов с тремя указанными выше нулевыми гипотезами приведена на рисунке 1. По рисунку видно, что учет смещения второго по-

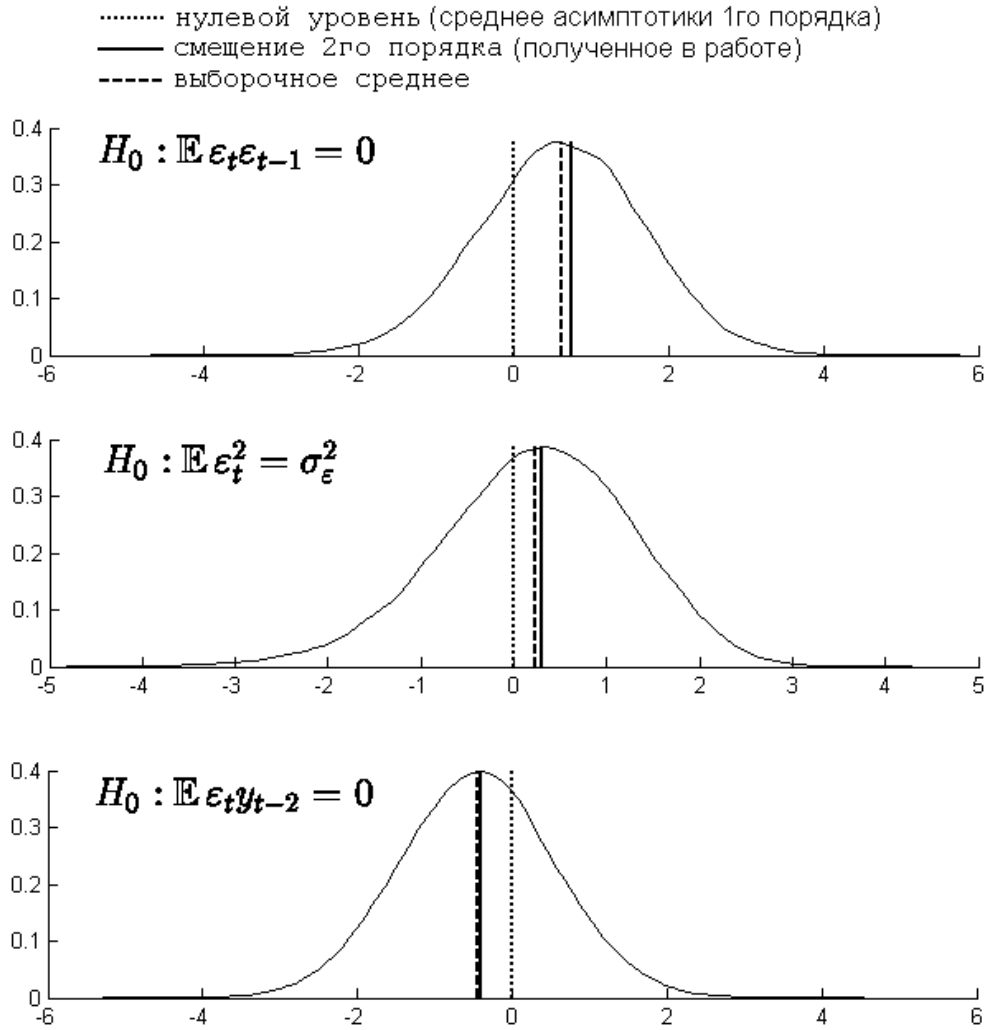


Рис. 1. Выборочная плотность статистики, оценивающей качество прогнозов, в случае скользящего окна, $R = 30, P = 170$.

рядка необходим для более точного тестирования гипотез в случае скользящего окна наблюдений.

В целом, согласно результатам экспериментов, учет полученного в работе смещения второго порядка почти полностью объясняет причину неудовлетворительного качества асимптотической аппроксимации распределения статистики S_R^2 при использовании скользящего окна, о котором упоминалось в работе [4].

В параграфе 1.5 приводятся заключительные замечания о полученных результатах, далее следует приложение, в котором приведены формулировки и доказательства технических лемм, использованных для получения результатов параграфа 1.3.

Во второй главе диссертации предлагается идея взвешенного учета прогнозов при получении точечной оценки величины $\mathbb{E}f(x_t, y_t, \theta)$. **В параграфе 2.1** дается краткое введение, а **в параграфе 2.2** дается постановка

задачи, совпадающая с постановкой задачи в первой главе за исключением того, что метод оценки параметра θ не специфицируется. Известно лишь, что параметр θ оценивается, используя расширяющееся окно наблюдений, что делает прогнозы в различные моменты времени неравнозначными – прогнозы в более поздние моменты времени являются более точными, чем в более ранние моменты времени, поскольку в них параметр θ оценивается по большему числу наблюдений. В связи с этим, предлагается вместо статистики S_R^1 использовать неравномерное усреднение прогнозов:

$$\mathbb{E}f(y, x, \theta) \approx \sum_{t=R+1}^T w_{t-R} f(y_t, x_t, \hat{\theta}_t), \quad \sum_{t=R+1}^T w_{t-R} = 1.$$

Весовые коэффициенты предлагается находить из условия:

$$\begin{cases} \mathbb{E} \left(\sum_{t=R+1}^T w_{t-R} f(y_t, x_t, \hat{\theta}_t) - \mathbb{E}f(y, x, \theta) \right)^2 \rightarrow \min_{\mathbf{w}}, \\ \sum_{t=R+1}^T w_{t-R} = 1. \end{cases} \quad (2)$$

Утверждение 4: Решением задачи (2) является следующий вектор из весовых коэффициентов:

$$\mathbf{w} = \frac{A^{-1}\mathbf{e}}{\mathbf{e}'A^{-1}\mathbf{e}}, \quad (3)$$

где вектор $\mathbf{e} = (1, 1, \dots, 1)' \in \mathbb{R}^P$, а матрица A состоит из следующих элементов:

$$a_{ij} = \mathbb{E} \left\{ f \left(y_{i+R}, x_{i+R}, \hat{\theta}_{i+R} \right) \left(f \left(y_{j+R}, x_{j+R}, \hat{\theta}_{j+R} \right) - \mathbb{E}f(y, x, \theta) \right) \right\}. \quad (4)$$

Поскольку в выражении для матрицы A присутствуют математические ожидания от статистик, расчет которых требует знания неизвестного случайного процесса, генерировавшего случайную выборку z_1, z_2, \dots, z_T , то для практического расчета весовых коэффициентов предлагается использовать приближение данного случайного процесса посредством располагаемой выборки, используя процедуру бутстрапа.

В параграфе 2.3 дается описание методик бутстрапа, примененных в численном эксперименте. Для выборок из независимых наблюдений использовался классический алгоритм бутстрапа (случайная выборка из наблюдений z_1, z_2, \dots, z_T с возвращением) для генерации множественных псевдовыборок, по которым производилось усреднение в формуле (4). Для выборок из зависимых наблюдений использовались следующие шесть методов бутстрапа: 1-бутстрап с перекрывающимися блоками, 2-бутстрап с неперекрывающимися блоками, 3-бутстрап с блоками случайной длины, 4-параметрический бутстрап, 5-бутстрап Холецкого, 6-бутстрап марковской цепи. Для методов бутстрапа, зависящих от параметра, приведена процедура для его наилучшего определения.

В параграфе 2.4 приведены описания и результаты численных экспериментов. Рассматривается следующая модель³:

$$\begin{cases} y_t = \beta_0 + \beta_1 x_t + \varepsilon_t, \\ \beta_0 = \beta_1 = 0, \quad \varepsilon_t \sim \mathcal{N}(0, 1), \\ x_t \sim \begin{cases} \mathcal{N}(0, \sigma_1^2), & \text{с вероятностью } p \\ \mathcal{N}(0, \sigma_2^2), & \text{с вероятностью } 1 - p \end{cases} \\ x_t \text{ и } \varepsilon_t \text{ серийно и взаимно независимы} \end{cases} \quad (5)$$

Ставится задача получения точечной оценки величины $\mathbb{E}f_t = \mathbb{E}\varepsilon^2$. Для определения истинных весов по формуле (3) производился расчет матрицы A методом Монте-Карло – усреднением по 500000 выборок, сгенерированных истинным случайным процессом (посредством модели (5)). Расчетные веса находились также по формуле (3), где матрица A была получена усреднением по 1000 бутстраповским псевдовыборкам. Для того, чтобы получить общее представление о работе метода в среднем, указанная процедура повторялась для 500 выборок, сгенерированных истинным случайным процессом.

На рисунке 3 показаны средние значения (плюс/минус их стандартные отклонения) весовых коэффициентов при $R = 10$, $T = 40$, $\sigma_1 = 1$, $\sigma_2 = 10$ и различных значениях p , а на рисунке 4 – при $R = 10$, $T = 40$, $\sigma_1 = 1$, $p = 0.9$ и различных значениях σ_2 . По рисункам видно, что более ранние прогнозы учитываются с меньшим весом, и диапазон изменения весов для модели (5) очень высокий, что подтверждает гипотезу о неравнозначности прогнозов в различные моменты времени. На рисунке 3 различие между истинными весами и расчетными увеличивается с ростом p . Это объясняется тем, что с ростом p уменьшается вероятность наблюдений $x_t \sim \mathcal{N}(0, \sigma_2^2)$ и метод бутстрапа по меньшему числу таких наблюдений хуже восстанавливает исходное распределение.

— — — равные веса
 - - - - - истинные веса
 ————— расчетные веса
 расчетные веса плюс/минус их стандартные отклонения

Рис. 2. Условные обозначения для рисунков 3 и 4.

На таблице 1 и 2 изображены средние оценки ожидаемого квадрата ошибки прогноза, полученные различными методами, а также средние квадраты отклонения оценки от точного значения $\sigma_\varepsilon^2 = 1$. По таблицам видно, что взвешивающий метод обеспечивает в среднем более близкие значения оцен-

³В случае использования нормально распределенных регрессоров в модели (5), выигрыш от применения метода взвешенного учета прогнозов оказался небольшим, по сравнению со статистикой S_R^1 .

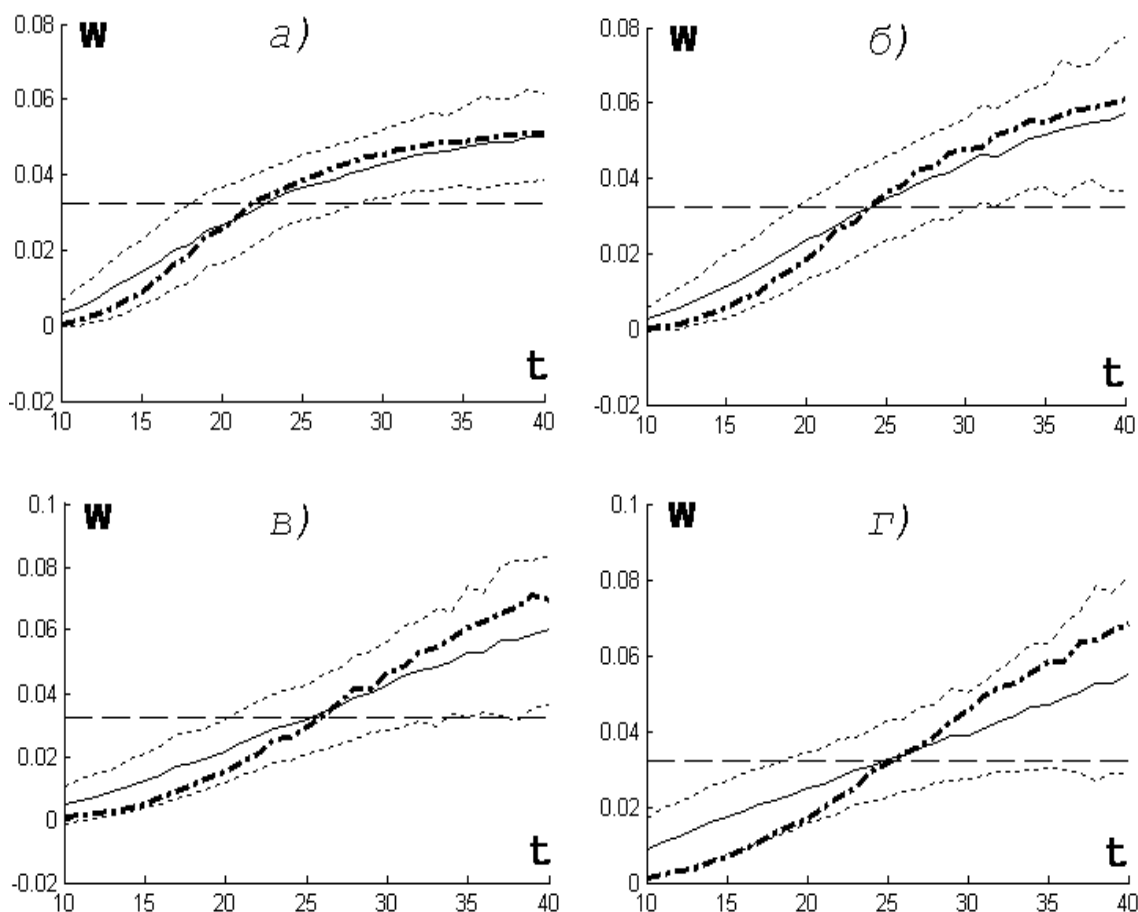


Рис. 3. Весовые коэффициенты при $R = 10, T = 40, \sigma_1 = 1, \sigma_2 = 10$ и $p = 0.7$ (а); $p = 0.8$ (б); $p = 0.9$ (в); $p = 0.95$ (г).

ки к оцениваемому параметру, и ожидаемый квадрат отклонения оценки от σ_ε^2 ниже.

Таблица 1.

Оценка квадрата ошибки прогноза/ожидаемого квадрата отклонения оценки от $\sigma_\varepsilon^2 = 1$ при $T = 40, R = 10, \sigma_1 = 1, \sigma_2 = 10$ и различных значениях p				
Тип взвешивания	$p = 0.7$	$p = 0.8$	$p = 0.9$	$p = 0.95$
Равные веса	1.194/0.382	1.254/0.495	1.271/0.541	1.288/0.732
Истинные веса	1.112/0.127	1.141/0.166	1.253/0.171	1.310/0.202
Расчетные веса	1.114/0.132	1.164/0.246	1.176/0.282	1.206/0.376

Таблица 2.

Оценка квадрата ошибки прогноза/ожидаемого квадрата отклонения оценки от $\sigma_\varepsilon^2 = 1$ при $T = 40, R = 10, \sigma_1 = 1, p = 0.9$ и различных значениях σ_2			
Тип взвешивания	$\sigma_2 = 10$	$\sigma_2 = 30$	$\sigma_2 = 50$
Равные веса	1.271/0.541	1.952/10.556	3.740/154.238
Истинные веса	1.253/0.171	1.693/0.931	3.128/4.083
Расчетные веса	1.176/0.282	1.414/8.010	1.648/13.018

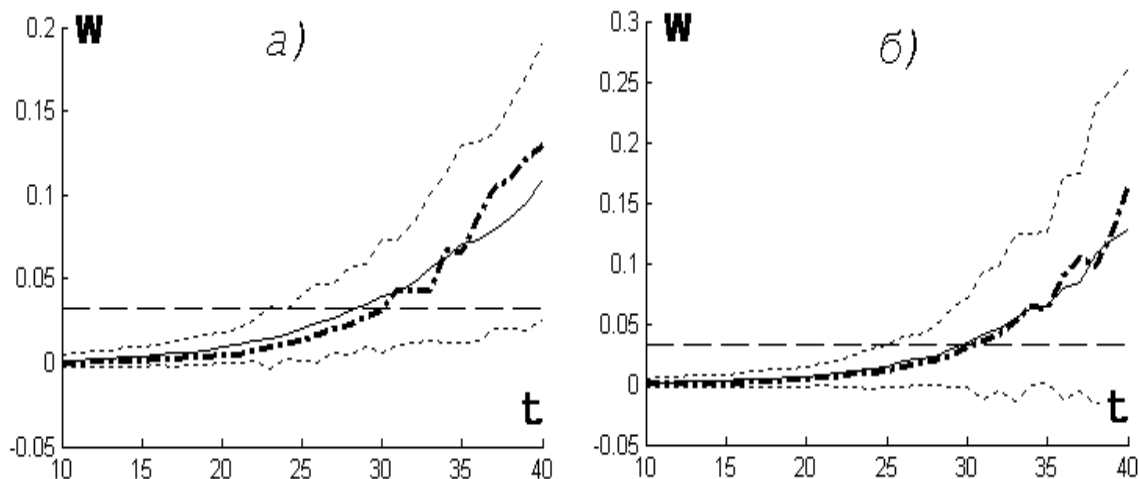


Рис. 4. Весовые коэффициенты при $R = 10, T = 40, \sigma_1 = 1, p = 0.9$ и $\sigma_2 = 30$ (а); $\sigma_2 = 50$ (б).

Предлагающийся метод взвешенного учета прогнозов также был протестирован на временных рядах, генерированных ARMA моделью, подобранной согласно байесовскому информационному критерию по располагаемой выборке наблюдений. Ниже приведены источники данных и соответствующие им ARMA модели.

1) Ежемесячные изменения ставок по облигациям правительства Канады:

$$y_t = 0.896y_{t-1} - 0.801y_{t-2} - 0.648\varepsilon_{t-1} + 1.040\varepsilon_{t-2} + 0.271\varepsilon_{t-4} + \varepsilon_t.$$

2) Изменение средних за месяц ставок по кредитам в Перу: $y_t = 0.321y_{t-1} + \varepsilon_t$.

3) Ежемесячные изменения доли финансовых организаций в ВВП Бразилии:

$$y_t = 0.262y_{t-1} + \varepsilon_t + 0.138\varepsilon_{t-5}.$$

Согласно результатам теста Жарке-Берра, ошибки ε_t в первой модели можно было считать нормальными, а во второй и третьей – нет. Применение метода взвешенного учета наблюдений во втором и третьем случаях привело к более существенному увеличению точности оценок, по сравнению со статистикой S_R^1 , чем в первом случае. Как и в случае независимых наблюдений, это обусловлено отклонением распределения данных от нормального распределения.

На таблицах 5 и 6 приведены средние оценки величины $f_t = \varepsilon_t^2$ различными методами и ожидаемые квадраты отклонений этих оценок от своего истинного значения σ_ε^2 (MSPE) для случаев изменений ставок по кредитам в Перу и доли финансовых организаций в ВВП Бразилии. Из таблиц видно, что, судя по смещенности оценок и, особенно, по ожидаемому квадрату ошибки оценивания, метод взвешенного учета прогнозов дает существенно более точные оценки, чем статистика S_R^1 .

Результаты расчетов не приведены для методов бутстрапа 1 и 2, для которых точность расчетов весовых коэффициентов оказалась существенно зависящей от нестационарности генерируемых данными методами псев-

довыборок. Остальные методы генерируют стационарные псевдовыборки, и результаты их применения отличаются несущественно.

Таблица 6.

Оценка квадрата ошибки прогноза при $T = 40, R = 10, \sigma_\varepsilon^2 = 0.498$		
<i>Название метода</i>	<i>Среднее значение</i>	<i>MSPE</i>
Равномерное взвешивание	0.651	0.127
Истинное взвешивание	0.635	0.100
Взвешивание (метод 3)	0.651	0.122
Взвешивание (метод 4)	0.649	0.115
Взвешивание (метод 5)	0.643	0.105
Взвешивание (метод 6)	0.642	0.119

Таблица 5.

Оценка квадрата ошибки прогноза при $T = 40, R = 10, \sigma_\varepsilon^2 = 0.0697$		
<i>Название метода</i>	<i>Среднее значение</i>	<i>MSPE</i>
Равномерное взвешивание	0.202	0.185
Истинное взвешивание	0.157	0.082
Взвешивание (метод 3)	0.181	0.047
Взвешивание (метод 4)	0.182	0.060
Взвешивание (метод 5)	0.185	0.167
Взвешивание (метод 6)	0.185	0.058

Третья и четвертые главы диссертации посвящены развитию нового метода (*взвешивающего метода*) построения устойчивых прогнозов по выборке наблюдений, подверженной структурным сдвигам. Идея метода заключается в учете наблюдений каждого структурного режима со своим весом при оценке параметров модели. Сами же весовые коэффициенты предлагается находить из условия минимизации ожидаемого квадрата ошибки прогноза модели. **В третьей главе** взвешивающий метод разрабатывается при достаточно ограничительных предположениях—для случая модели линейной регрессии, оцениваемой МНК, с независимыми ошибками и экзогенными регрессорами⁴. Используя асимптотическое приближение, показано, что взвешивающий метод дает более точные прогнозы, чем метод выбора длины окна, предложенный в статье [11], решающий аналогичную задачу при аналогичных предположениях. Данный результат подтверждается результатами приводимого в конце главы численного эксперимента. **В четвертой главе** взвешивающий метод обобщается на случай статистической модели общего вида, оцениваемой методом экстремального оценивания (включающем МНК как частный случай).

В параграфе 4.1 обосновывается актуальность темы. **В параграфе 4.2** дается постановка задачи. Рассматривается выборка наблюдений z_1, z_2, \dots, z_n , где каждое наблюдение делится на вектор регрессоров и зависимую

⁴Экзогенность регрессоров — предположение о том, что совокупность регрессоров и совокупность ошибок в выборке независимы.

переменную: $z_t = (x_t, y_t)^T$, $x_t \in \mathbb{R}^{1 \times d}$, $y_t \in \mathbb{R}$, которые удовлетворяют модели: $y_t = g(x_t, \theta^t) + \varepsilon_t$; $x_t \sim F_{x_t}$, $\varepsilon_t \sim F_{\varepsilon_t}$, $\mathbb{E}\varepsilon_t = 0$.

Вектор неизвестных параметров модели $\theta^t \in \mathbb{R}^{p \times 1}$ удовлетворяет условию экстремального оценивания: $\theta^t = \arg \max_{u \in \Theta} \mathbb{E}[\psi(z_t, u)]$.

В выборке имеется m структурных сдвигов в известные моменты $\tau_1, \tau_2, \dots, \dots, \tau_m$, в которые может изменяться значение вектора θ , а также распределение регрессоров и ошибок:

$$\begin{aligned} t = 1, 2, \dots, \tau_1 : & \quad \theta^t = \theta_1 = \theta + \frac{\Delta\theta_1}{n^\delta}, & F_{x_t} = F_x^1, & F_{\varepsilon_t} = F_\varepsilon^1; \\ t = \tau_1 + 1, \tau_1 + 2, \dots, \tau_2 : & \quad \theta^t = \theta_2 = \theta + \frac{\Delta\theta_2}{n^\delta}, & F_{x_t} = F_x^2, & F_{\varepsilon_t} = F_\varepsilon^2; \\ \dots & \quad \dots & \dots & \dots \\ t = \tau_{m-1} + 1, \tau_{m-1} + 2, \dots, \tau_m : & \quad \theta^t = \theta_m = \theta + \frac{\Delta\theta_m}{n^\delta}, & F_{x_t} = F_x^m, & F_{\varepsilon_t} = F_\varepsilon^m; \\ t = \tau_m + 1, \tau_m + 2, \dots, n : & \quad \theta^t = \theta_{m+1} = \theta, & F_{x_t} = F_x^{m+1}, & F_{\varepsilon_t} = F_\varepsilon^{m+1}. \end{aligned}$$

Используются следующие обозначения:

Оператор \mathbb{E}_k , $k = 1, 2, \dots, m+1$, обозначает математическое ожидание в соответствии с вероятностным пространством, порожденным моделью в структурном режиме k : $y_t = g(x_t, \theta_k) + \varepsilon_t$; $x_t \sim F_x^k$, $\varepsilon \sim F_\varepsilon^k$;

\bar{Z} обозначает область значений z_t ; $q_1 = \frac{\tau_1}{n}$, $q_2 = \frac{\tau_2 - \tau_1}{n}$, \dots , $q_{m+1} = \frac{n - \tau_m}{n}$;

$\psi_i(u) = \psi(z_i, u)$; $I_k = \{\tau_{k-1} + 1, \tau_{k-1} + 2, \dots, \tau_k\}$;

$\tau_0 = 0$, $\tau_{m+1} = n$, $\alpha_{m+1} = 1$, $\Delta\theta_{m+1} = 0$.

$Q_k = \mathbb{E}_k \{\psi_i''(\theta_k)\}$, $i \in I_k$; $\Sigma_k = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \mathbb{E}_k \left\{ \psi'(z_t, \theta_k) [\psi'(z_{t-j}, \theta_k)]^T \right\}$;

$P = \alpha_1 q_1 Q_1 + \alpha_2 q_2 Q_2 + \dots + \alpha_{m+1} q_{m+1} Q_{m+1}$; $B = -P^{-1}$;

$\bar{\Sigma} = B(\alpha_1^2 q_1 \Sigma_1 + \alpha_2^2 q_2 \Sigma_2 + \dots + \alpha_m^2 q_m \Sigma_m + q_{m+1} \Sigma_{m+1}) B$;

$\bar{b} = -Bb$; $b = \alpha_1 q_1 Q_1 \Delta\theta_1 + \alpha_2 q_2 Q_2 \Delta\theta_2 + \dots + \alpha_m q_m Q_m \Delta\theta_m$.

Делаются следующие предположения:

1. В вышеприведенных условных обозначениях математические ожидания существуют, а матрицы невырождены.
2. Функция $\psi(z, u)$ трижды дифференцируема по второму аргументу при $u \in \Theta$, $z \in \bar{Z}$.
3. $\mathbb{E} \{ |\psi(z, u)| \times \mathbb{I}[|\psi(z, u)| > K] \} \rightarrow 0$ равномерно относительно $u \in \Theta$ при $K \rightarrow 0$ ($\mathbb{I}[\cdot]$ - индикаторная функция).
4. Решение максимизационной задачи $\theta_k = \arg \max_{u \in \Theta} \mathbb{E}_k [\psi(z_t, u)]$ существует и единственно при $k = 1, 2, \dots, m+1$.
5. Θ - компактное множество.
6. Случайный процесс Z_t , порождающий выборку z_1, z_2, \dots, z_n , является строго стационарным и эргодическим.
7. Существует такая измеримая функция $D(z)$, что $\mathbb{E}D(z) < \infty$, и при $t = 1, 2, \dots$ выполнено условие:

$$\sup_{1 \leq i, j, k \leq w} \sup_{u \in \Theta} \sup \left[|\psi_t(u)|; |\{\psi_t'(u)\}_i|; |\{\psi_t''(u)\}_{i,j}|; |\{\psi_t'''(u)\}_{i,j,k}| \right] < D(z_t).$$

8. Выполнено условие сильного перемешивания:

$$\sup_{A \in F_{-\infty}^t, B \in F_{t+k}^{+\infty}} \{|\mathbb{P}(A, B) - \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)|\} < c_1 k^{-\omega},$$

где c_1 - некоторая константа, $F_a^b = \sigma\{z_a, z_{a+1}, \dots, z_b; \varepsilon_a, \varepsilon_{a+1}, \dots, \varepsilon_b\}$.

9. Существуют такие константы c_2 и c_3 , что

$$\mathbb{E}|\bar{\Psi}|^{2+\delta} < c_2 < \infty, \quad \mathbb{E}|\varepsilon_t|^{2+\delta} < c_3 < \infty, \quad \delta > 0, \quad t = 1, 2, \dots,$$

где $\bar{\Psi} = \text{vec}\{1, \bar{\Psi}_1, \bar{\Psi}_2, \dots, \bar{\Psi}_{m+1}\}$, $\bar{\Psi}_k = \text{vec}\{\psi'_i(\theta_k), \psi''_i(\theta_k - Q_k)\}$, $i \in I_k$.

10. Для параметров ω и δ из предположений 8 и 9 выполнено условие:

$$\gamma = \frac{\omega\delta}{2 + \delta} > \frac{3}{2}.$$

11. Существует производная $g''_{22}(x, u)$ при $u \in \Theta$, причем найдется такая функция $G_2(\cdot)$, что $\sup_{u \in \Theta} |g''(x_{n+1}, u)| \leq G_2(x_{n+1})$.

12. Для $\forall u \in \Theta \quad \sum_{j=1}^{+\infty} \mathbb{E}_{m+1} \{\varepsilon_{n+1} B \psi'_{n+1-j}(u)\} < \infty$.

13. Случайные величины x_t и ε_t независимы при каждом t .

14. Существует математическое ожидание $\mathbb{E}\{\varepsilon_{n+1} \text{vec}[\otimes_{i=1}^6 \bar{\Psi}]\} < \infty$.

Для получения последующих результатов используется асимптотическое приближение, при котором, с ростом выборки, доли структурных режимов в общем объеме выборки q_1, q_2, \dots, q_{m+1} остаются постоянными, а величины структурных сдвигов $\frac{\Delta\theta_1}{n^\delta}, \frac{\Delta\theta_2}{n^\delta}, \dots, \frac{\Delta\theta_m}{n^\delta}$ убывают.

В параграфе 4.3 дается описание взвешивающего оценивания:

$$\hat{\theta} = \arg \max_{u \in \Theta} \frac{1}{n} \left[\alpha_1 \sum_{i \in I_1} \psi_i(u) + \dots + \alpha_m \sum_{i \in I_m} \psi_i(u) + \sum_{i \in I_{m+1}} \psi_i(u) \right]. \quad (6)$$

При сделанных предположениях исследуются асимптотические свойства взвешивающей оценки.

Утверждение 5: Имеют место следующие асимптотические свойства взвешивающей оценки при различных значениях параметра δ :

$$\begin{aligned} n^\delta(\hat{\theta} - \theta) &\xrightarrow{d} \bar{b}, && \text{при } \delta \in (0, \frac{1}{2}); \\ \sqrt{n}(\hat{\theta} - \theta) &\xrightarrow{d} \mathcal{N}(\bar{b}, \bar{\Sigma}), && \text{при } \delta = \frac{1}{2}; \\ \sqrt{n}(\hat{\theta} - \theta) &\xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, \bar{\Sigma}), && \text{при } \delta \in (\frac{1}{2}, +\infty). \end{aligned} \quad (7)$$

Утверждение 6: При $\delta \in (\frac{1}{3}, \frac{1}{2}]$ справедлив следующий асимптотический переход:

$$\sqrt{n} \left(\hat{\theta} - \theta - \frac{1}{n^\delta} \bar{b} \right) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, \bar{\Sigma}). \quad (8)$$

В параграфе 4.4, исходя из условия минимизации ожидаемого квадрата ошибки прогноза $\mathbb{E}\hat{\varepsilon}_{n+1}^2 = \mathbb{E}\left[y_{n+1} - g\left(x_{n+1}, \hat{\theta}\right)\right]^2$, выводится условие, определяющее оптимальные весовые коэффициенты.

Утверждение 7: При $\delta \in (\frac{1}{3}, \frac{1}{2}]$ и вероятности структурного сдвига в момент $n+1$ порядка $O(1/n^{2\delta})$ (или меньше), задача минимизации ожидаемого квадрата ошибки прогноза эквивалентна следующей задаче:

$$n^{1-2\delta}[g'_\theta(x_{n+1}, \theta) \bar{b}]^2 - 2g'_\theta(x_{n+1}, \theta) B \sum_{j=1}^{+\infty} \mathbb{E}_{m+1} \{\varepsilon_{n+1} \psi'_{n+1-j}(\theta)\} + \\ + g'_\theta(x_{n+1}, \theta) \bar{\Sigma} g'_\theta(x_{n+1}, \theta)^T \rightarrow \min_{\alpha_1, \dots, \alpha_m} \quad (9)$$

Если дополнительно $\mathbb{E}\{\varepsilon_{n+1} | z_1, z_2 \dots z_n\} = 0$, то задача (9) упрощается:

$$n^{1-2\delta}[g'_\theta(x_{n+1}, \theta) \bar{b}]^2 + g'_\theta(x_{n+1}, \theta) \bar{\Sigma} g'_\theta(x_{n+1}, \theta)^T \rightarrow \min_{\alpha_1, \dots, \alpha_m} \quad (10)$$

В конце четвертого параграфа выписываются задачи (9) и (10) для модели линейной регрессии $y_t = x'_t \theta_t + \varepsilon_t$, оцениваемой МНК. В случае единственного структурного сдвига при $Q_1 = Q_2$, в задаче (10) находится аналитическое выражение для оптимального весового коэффициента:

$$\alpha_1 = \frac{\sigma_2^2 x'_{n+1} \mathbb{E}\{x_t x'_t\}^{-1} x_{n+1}}{q_1 n^{1-2\delta} [x'_{n+1} \Delta \theta_1]^2 + \sigma_1^2 x_{n+1} \mathbb{E}\{x_t x'_t\}^{-1} x_{n+1}}$$

Таким образом, применение взвешивающего метода состоит из трех этапов:

1. Найти оптимальные весовые коэффициенты, решив задачу (9).
2. Найти взвешивающую оценку (6).
3. Построить прогноз $\hat{y}_{n+1} = g(x_{n+1}, \hat{\theta})$.

В параграфе 4.5 приводятся результаты численного эксперимента, подтверждающего преимущества предложенного метода по сравнению со стандартными подходами. Оценивается следующая модель векторной авторегрессии методом наименьших квадратов:

$$\begin{cases} y_{t+1} = a + bx_t + cy_t + \varepsilon_{t+1} \\ x_{t+1} = d + ex_t + \eta_{t+1} \end{cases}$$

Нижний индекс у параметров модели векторной авторегрессии будет обозначать номер структурного режима, которому эта переменная соответствует. Значения по умолчанию для величин a, b, c, d, e полагались равными нулю, а значения для $\sigma_{2\varepsilon}$ и $\sigma_{1\eta}$ полагались равными единице, если не указано обратного, $\delta = (1/2 + 1/3)/2$ (выбор параметра $\delta \in (\frac{1}{3}, \frac{1}{2}]$ не оказывал

существенного влияния на результаты статистических испытаний). Прогнозирование производилось для значений регрессоров $x_n = y_n = 1$. Выбор других значений по умолчанию не оказывает качественного влияния на полученные результаты. Для расчета точности прогнозирования, для каждой точки осуществлялось 10000 статистических испытаний. Расчеты корня из ожидаемого квадрата ошибки прогноза приведены на рисунке 6 для случая одного сдвига, и на рисунке 7 – для случая двух сдвигов. Обозначения для рисунков 6-7 приведены на рисунке 5.

————— МНК по всем наблюдениям
 - - - - - МНК по наблюдениям последнего структурного режима
 ————— Взвешивающий метод (предложенный в работе)

Рис. 5. Обозначения для рисунков 6-7.

Случай одного структурного сдвига. Полагаем везде, где не указано обратного, что $\tau_1 = 100, n = 150$. Рассматриваются следующие численные эксперименты:

- 1 : $\sigma_{2\varepsilon} = 5, a_2 = t, t \in [-2.5; 2.5]$; 2 : $\sigma_{2\varepsilon} = 1, c_2 = t, t \in [-0.95; 0.95]$;
 3 : $\sigma_{2\varepsilon} = 5, a_2 = b_2 = t, t \in [-2; 2]$; 4 : $\sigma_{2\varepsilon} = 1, a_2 = c_2 = t, t \in [-0.4; 0.4]$;
 5 : $\sigma_{2\varepsilon} = 5, c_2 = t, \sigma_{2\varepsilon} = 1 - 0.2t, t \in [-0.05; 0.8]$;
 6 : $\sigma_{2\varepsilon} = 1, b_2 = t, c_2 = -t, t \in [-0.95; 0.95]$;
 7 : $\sigma_{2\varepsilon} = 5, c_2 = 0.5, \tau_1 = t, t \in [10, 11, \dots, 130]$;
 8 : $\sigma_{2\varepsilon} = 5, a_2 = -0.2, b_2 = 0.4, \tau_1 = t, t \in [10, 11, \dots, 130]$.

Случай двух структурных сдвигов. Полагаем везде, где не указано обратного, что $\tau_1 = 40, \tau_2 = 80, n = 100$. Рассматриваются следующие численные эксперименты:

- 1 : $a_2 = t, a_3 = -t, t \in [-0.6; 0.6]$; 2 : $c_2 = t, c_3 = -t, t \in [-0.6; 0.6]$;
 3 : $a_1 = 2t, a_2 = t, t \in [-0.6; 0.6]$; 4 : $b_1 = 2t, b_2 = t, t \in [-0.6; 0.6]$;
 5 : $c_1 = 2t, c_2 = t, t \in [-0.45; 0.45]$; 6 : $b_2 = t, t \in [-1.4; 1.4]$;
 7 : $b_2 = 1, \tau_2 = t, t \in [50, 51, \dots, 90]$; 8 : $b_2 = 1.2, \sigma_{2\varepsilon} = t, t \in [0.3; 3.3]$.

Расчеты корня из ожидаемого квадрата ошибки прогноза приведены на рисунке 7. Из рисунков 6-7 можно заключить, что предложенный метод дает в среднем более устойчивые прогнозы к величине структурных сдвигов, чем методы МНК, примененные ко всем наблюдениям или только к наблюдениям последнего структурного режима. В случае двух структурных сдвигов взвешивающий метод превосходит МНК, примененный к наблюдениям последнего структурного режима, по средней точности прогнозов при всех значениях рассмотренных величин структурных сдвигов.

В **заключении** диссертации приведены основные выводы исследования.

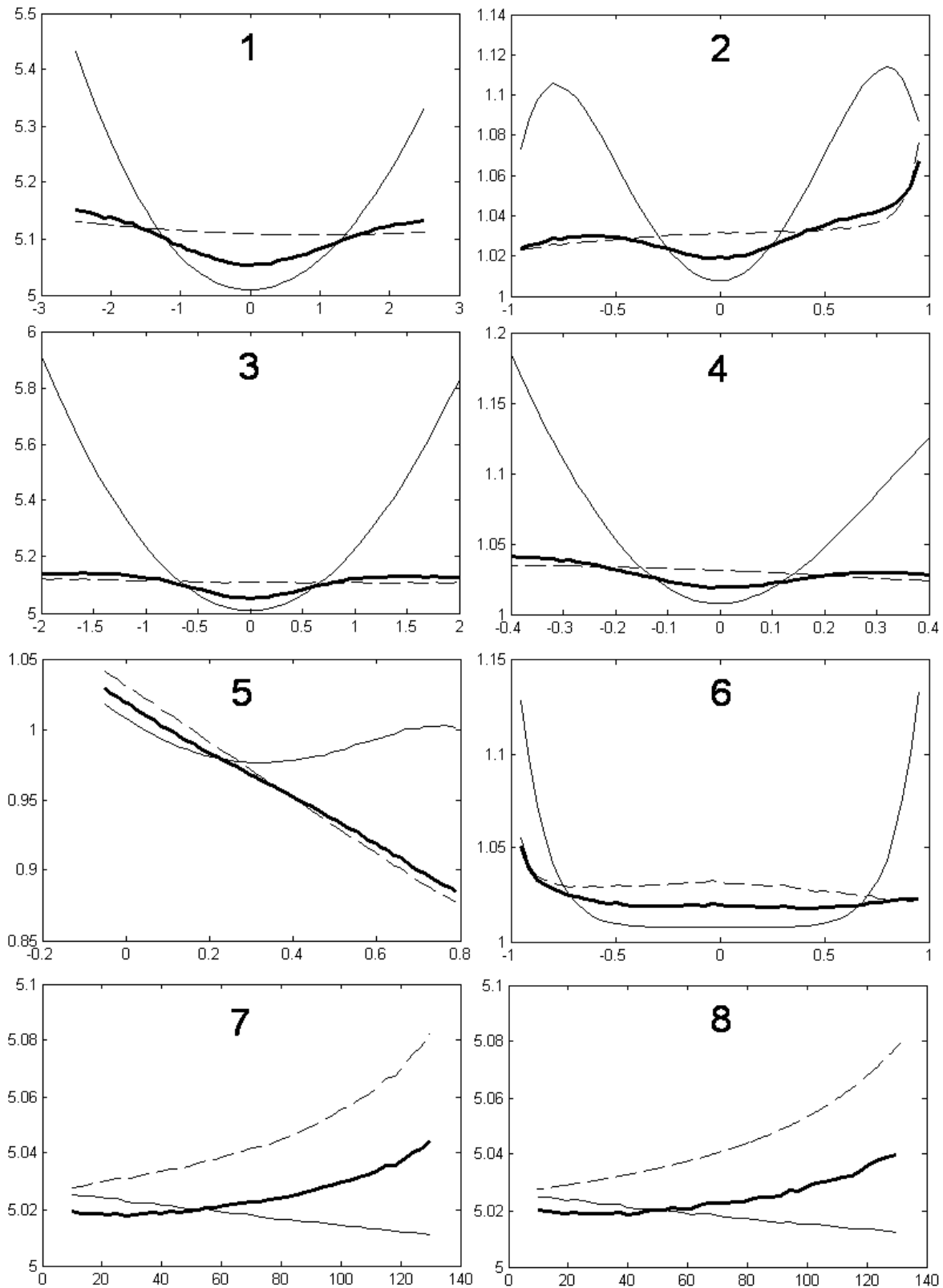


Рис. 6. Корень из ожидаемого квадрата ошибки прогноза (ось Y) в зависимости от величины сдвига t (ось X). Эксперименты для случая одного структурного сдвига.

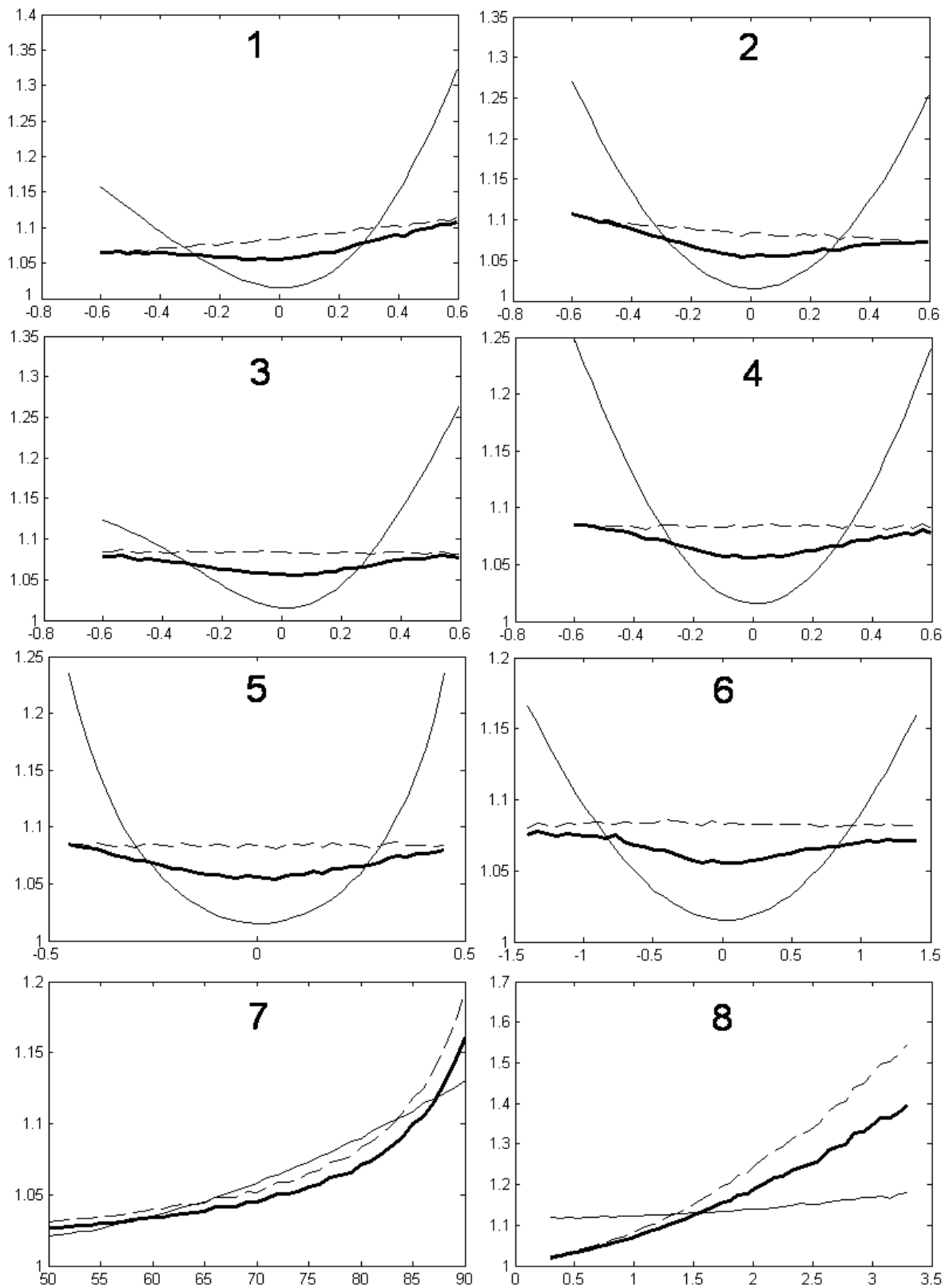


Рис. 7. Корень из ожидаемого квадрата ошибки прогноза (ось Y) в зависимости от величины сдвига t (ось X). Эксперименты для случая двух структурных сдвигов.

Основные результаты:

1. Получено асимптотическое распределение статистики S_R^2 , оценивающей качество прогнозов, для случая полного окна наблюдений.
2. Для статистики S_R^2 найдено асимптотическое смещение второго порядка, учет которого позволяет существенно повысить точность асимптотической аппроксимации распределения статистики в случае скользящего окна наблюдений.
3. Предложен новый метод получения точечной оценки качества прогнозов, основанный, в отличие от общепринятой статистики S_R^1 , на неравномерном усреднении прогнозов в различные моменты времени. Получаемые в результате применения метода весовые коэффициенты позволяют судить о степени неравнозначности прогнозов при расчете их качества.
4. Предложен новый метод устойчивого прогнозирования при наличии структурных сдвигов, основанный на взвешенном учете наблюдений из различных структурных режимов.
5. Преимущество полученных в работе методов и подходов подтверждено результатами сравнительных численных экспериментов.

Основные результаты диссертации опубликованы в следующих работах автора:

1. Китов В.В. Выбор оптимальных весов при оценке качества прогнозов модели. // Тезисы выступления на XXI научной конференции Российской экономической школы. Май 2007.
2. Китов В.В. Новые методы прогнозирования при наличии структурных сдвигов и оценки качества прогнозов. // Труды 12й всероссийской школы-семинара *Современные проблемы математического моделирования*. 2007. стр.109-116.
3. Китов В.В. Метод взвешенного учета ошибок для оценки качества прогнозов. // Вестник МГУ. 2008. Том 32, N1, стр.56-63.
4. Китов В.В. Тестирование метода взвешенной оценки прогнозов на временных рядах. // Кибернетика и системный анализ. 2008. Том 44, N1, стр. 148-158.
5. Китов В.В. Метод взвешенного учета наблюдений для прогнозирования при наличии структурных сдвигов. // Математическое моделирование. 2008. Том 20, N3, стр. 29-47.
6. Anatolyev S.A., Kitov V.V. Using all observations when forecasting under structural breaks. // Finnish Economic Papers. 2007. Том 20, N2, стр. 166-176.
7. Оценка качества прогнозов и прогнозирование при наличии структурных сдвигов. // Тезисы выступления на конференции Ломоносов-2008, секция *Математика и механика*. Апрель 2008. ISBN 978-5-91579-003-1, стр. 21-22.

Другие работы автора

1. Китов В.В. Построение оптимальной инвестиционной стратегии при наличии фиксированных и пропорциональных издержек. // Труды 28-ой конференции механико-математического факультета МГУ. 2006. стр 79-83.
2. Китов В.В. Оптимальное управление инвестициями в актив со случайной доходностью при транзакционных издержках. // Математическое моделирование. 2007. Том 19, №5, стр.45-58.

Список литературы

1. Clements M.P. 2005. *Evaluating Econometric Forecasts of Economic and Financial Variables*. Palgrave Macmillan. New York.
2. Diebold F.X., Mariano R.S. 1995. *Comparing Predictive Accuracy*. Journal of Business & Economic Statistics 13(3), 253-263.
3. West K.D. 1996. *Asymptotic Inference About Predictive Ability*. Econometrica 64(5), 1067-1084.
4. West K.D., McCracken M.V. 1998. *Regression-based Tests of Predictive Ability*. International Economic Review 39(4), 817-40.
5. Jouini J., Boutahar M. 2005. *Evidence on Structural Breaks in U.S. Time Series*. Economic Modelling 22(3), 391-422.
6. Layton, Allan P., Valadkhani, Abbas, Pahlavani, Mosayeb. 2005. *Multiple structural breaks in Australia's macroeconomic data: an application of the Lumsdaine and Papell Test*. International Journal of Applied Econometrics and Quantitative Studies, 2(3), 31-44.
7. Manski C.F. 1988. *Analog Estimation Methods in Econometrics*. NY: Chapman&Hall.
8. Meese R.A., Rogoff K. 1983. *Empirical Exchange Rate Models of the Seventies: Do They Fit Out of Sample?* Journal of International Economics, 14 (February, 1-2), 3-24.
9. Pesaran M.H., Timmermann A. 2004. *How costly is it to ignore breaks when forecasting the direction of a time series*. International Journal of Forecasting, 20(3), 411-425.
10. Pesaran M.H., Timmermann A. 2002. *Market timing and return prediction under model instability*. Journal of Empirical Finance 9(5), 495-510.
11. Pesaran M.H., Timmermann A. 2007. *Selection of estimation window in the presence of breaks*. Journal of Econometrics, 137(1), 134-161.